VIII.1) ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

1) Généralités.

DEF : une équation différentielle du premier ordre est une expression du type

$$(E) : f(x, y, y') = 0$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Résoudre (ou *intégrer*) (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est déterminer toutes les fonctions y continûment dérivables sur I telles que

$$\forall x \in I \quad f(x, y(x), y'(x)) = 0$$

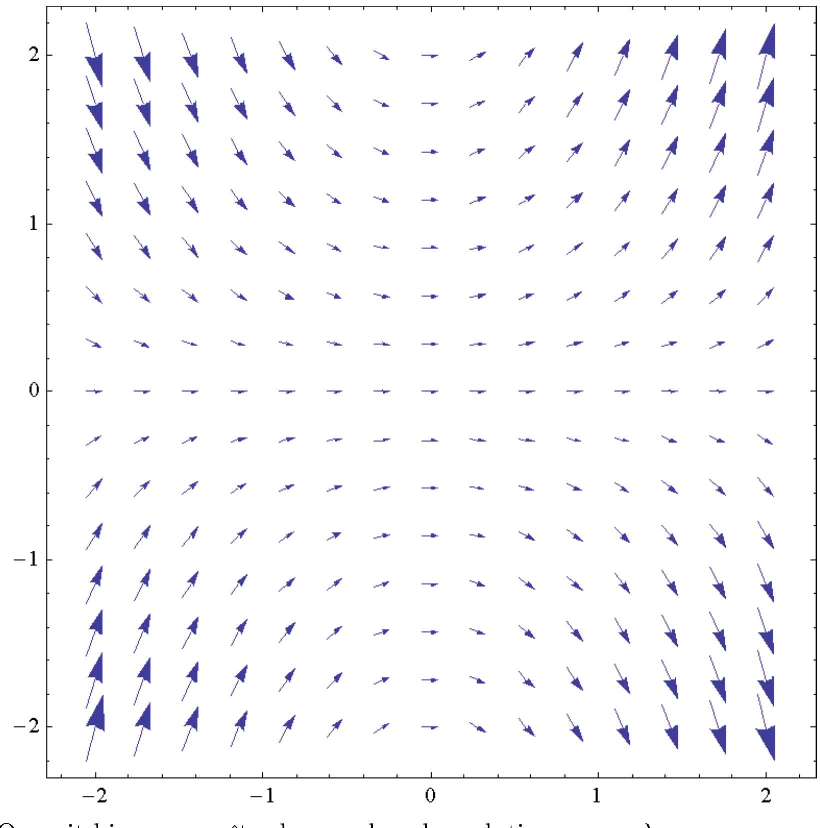
Cas particuliers (Hors programme) :

- équation "résolue en y'" : équation du type

$$(E) : y' = f(x, y)$$

Dans ce cas, si à tout point $M = (x, y)$ de D_f on associe le vecteur $\overrightarrow{V}(M) = (1, f(x, y))$, le vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ dirige la tangente à la courbe de la solution de (E) passant par M ; le tracé d'un certain nombre de ces vecteurs donne alors une bonne idée des courbes des solutions de l'équation différentielle.

Avec Mathematica, pour l'équation $y' = xy$: VectorPlot[{1, x y}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]



On voit bien apparaître les courbes des solutions : $y = \lambda$........

- équation "incomplète en x" : équation du type

$$f(y, y') = 0$$

Si on arrive à la résoudre en y' (soit $y' = g(y)$), Elle s'intègre en l'écrivant sous la forme $y'h(y) = 1$ (où $h = \dfrac{1}{g}$), ce qui donne $H(y) = x + C$, où H est une primitive de h (mais attention au pb des points où g s'annule).

- équation " incomplète en y " : équation du type

$$f(x, y') = 0$$

Si on arrive à la résoudre en y' (soit $y' = g(x)$), il ne reste plus qu'à trouver une primitive de g.

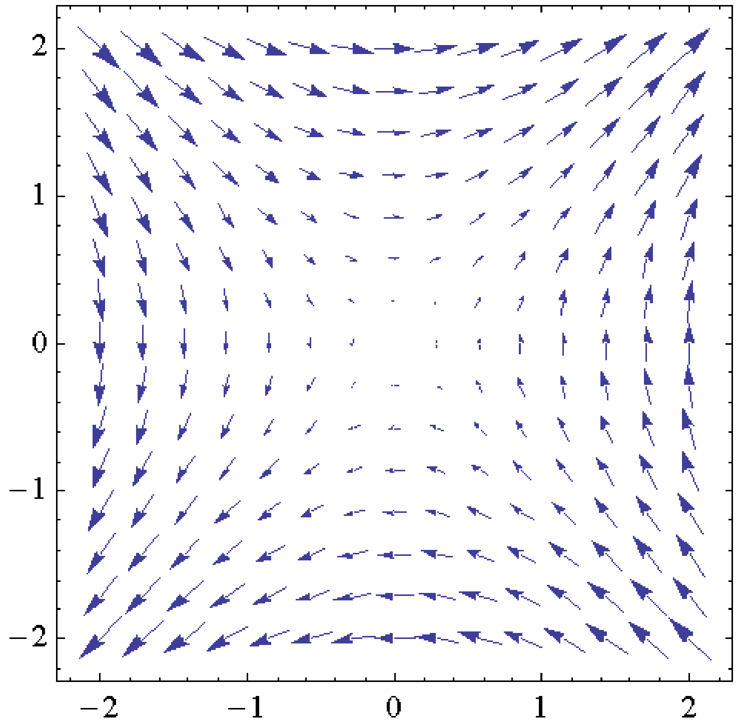
- équation "à variables séparables" : qui peut se mettre sous la forme :

$$y' f(y) = g(x)$$

Elle s'intègre sous la forme : $F(y) = G(x) + C$, où F et G sont des primitives de f et g.

E1 : $yy' = x$

VectorPlot[{y, x}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]



2) Équations différentielles linéaires du premier ordre.

a) Définitions et premières propriétés.

DEF : une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type

$$(E) : a(x) y' + b(x) y = c(x)$$

où a, b, c sont trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Résoudre (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est donc déterminer l'ensemble

$$S_I(E) = \left\{ y \in C^1(I, \mathbb{R}) \ / \ \forall x \in I \ \ a(x) y'(x) + b(x) y(x) = c(x) \right\}$$

L'équation *homogène*, ou *sans second membre* associée à (E) est l'équation :

$$(E_{ssm}) : a(x) y' + b(x) y = 0$$

PROP 1 : l'ensemble des solutions de l'équation homogène $S_I(E_{ssm})$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I,\mathbb{R})$.
D1

PROP 2 : soit $S_I(E)$ est vide, soit il est non vide, et si y_0 est une solution particulière de (E),

$$S_I(E) = y_0 + S_I(E_{ssm})$$

D2

REM 1 en d'autres termes : $S_I(E)$ est, s'il n'est pas vide, un sous espace affine de $C^1(I,\mathbb{R})$ parallèle à $S_I(E_{ssm})$.

REM 2, encore en d'autres termes : on obtient la solution générale de (E) en ajoutant à une solution particulière (s'il y en a une) la solution générale de l'équation homogène associée.

b) Résolution de l'équation homogène.

TH : si les fonctions a, b sont continues sur I, ET SI a NE S'ANNULE PAS SUR I, alors $S_I(E_{ssm})$ est une droite vectorielle engendrée par la fonction y_1 définie par $y_1(x) = e^{d(x)}$ avec d primitive de $-\dfrac{b}{a}$ sur I.
D3

Rédiger :

$$ay' + by = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{b}{a}y \Leftrightarrow y = \alpha e^{\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx} = \alpha ...\text{(faire le calcul)}$$

E2 : $\sin x . y' = \cos x . y$ sur $]0, \pi[$.

ATTENTION : si la fonction a s'annule, il faudra résoudre sur plusieurs intervalles et ensuite "recoller" les solutions obtenues. $S_I(E_{ssm})$ n'est alors plus forcément de dimension 1.

E3 : $xy' = 2y$.

c) Diverses méthodes partielles permettant d'obtenir une solution particulière de (E).

α) Si a, b, c sont polynomiales, rechercher une solution polynomiale (en raisonnant auparavant sur le degré de cette éventuelle solution)

E4 : $xy' - 2y = -x - 2$

Attention : il n'y a pas forcément une solution polynomiale ; exemple : $y' = xy + 1$.

β) Si $c(x)$ est de la forme $e^{d(x)} f(x)$, chercher y sous la forme $y = e^{d(x)} z$.

En effet : y est solution de $ay' + by = e^d f \Leftrightarrow z$ est solution de $az' + (ad' + b) z = f$
D4

Si a,b, d et f sont polynomiales, appliquer alors le α).

E5 : $xy' - 3y = x^4 e^x$

γ) Méthode de combinaison des solutions.

PROP : si $\left\{ \begin{array}{l} y_1 \text{ est solution de } (E_1) : ay' + by = c_1 \\ y_2 \text{ est solution de } (E_2) : ay' + by = c_2 \end{array} \right.$ alors $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est solution de $(E) : ay' + by = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$.
D5

E6 : $y' - y = x - e^x + 2e^{2x}$

δ) Passage en complexes.

LEMME : $\underline{y}$ est solution complexe de l'équation $a\underline{y}'+b\underline{y} = c + id$ (a, b, c, d fonctions réelles) si et seulement si

$$\begin{cases} \text{Re}\left(\underline{y}\right) \text{ est solution de } ay' + by \ = c \\ \text{Im}\left(\underline{y}\right) \text{ est solution de } ay' + by = d \end{cases}$$

D6

Si donc on a une équation du type $ay' + by = d\cos f$, on cherchera d'abord une solution particulière complexe de

$$a\underline{y}' + b\underline{y} = de^{if}$$

La partie réelle de cette solution sera une solution particulière de l'équation de départ.

Si de même on a une équation type $ay' + by = d\sin f$, on cherchera d'abord une solution particulière complexe de

$$a\underline{y}' + b\underline{y} = de^{if}$$

La partie imaginaire de cette solution sera une solution particulière de l'équation de départ.

E7 : $y' - y = \cos x$, $y' - y = x\cos x$

d) Résolution de (E) par la méthode dite "de variation de la constante".

On se place toujours dans le cas où a ne s'annule pas sur l'intervalle I ; on sait alors que (E_{ssm}) possède une solution jamais nulle y_1.

La méthode de variation de la constante consiste à chercher les solutions de (E) sous la forme zy_1 où z est une fonction au lieu d'une constante ; cela revient en fait à changer de fonction inconnue (z au lieu de y) ; on a alors :

PROP : zy_1 est solution de $(E) \Leftrightarrow z' = \dfrac{c}{ay_1}$.

D7

CORO : si les fonctions a, b, c sont continues sur I, ET SI a NE S'ANNULE PAS SUR I,

$$y \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ y = y_0 + \lambda y_1$$

La fonction y_1 étant définie par $y_1(x) = e^{d(x)}$ avec d primitive de $-\dfrac{b}{a}$ sur I et la fonction y_0 définie par $y_0(x) = y_1(x) f(x)$ avec f primitive de $\dfrac{c}{ay_1}$ sur I.

$S_I(E)$ est donc la droite affine dirigée par y_1 et passant par y_0.

REM 1 : la résolution d'une équation linéaire du premier ordre exige donc deux calculs de primitive.

REM 2 : les fonctions y_1 et y_0 ne sont pas définies de façon unique à cause des constantes d'intégration intervenant dans les calculs de d et f ; y_1 est en fait n'importe quelle solution non nulle de (E_{ssm}) et y_0 n'importe quelle solution de (E).

E8 : $xy' - 3y = x^4 e^x$

E9 : $y' - y = \cos x$.

VIII.2) ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE.

1) Généralités.

DEF : une équation différentielle du deuxième ordre est une expression du type

$$(E) : f\left(x, y, y', y''\right) = 0$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$.

"Résoudre" (ou "intégrer") (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est déterminer toutes les fonctions $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ (deux fois dérivables et de dérivée seconde continue) telles que

$$\forall x \in I \quad f\left(x, y(x), y'(x), y''(x)\right) = 0$$

REM : si l'équation est incomplète en y, c'est-à dire du type $f\left(x, y', y''\right) = 0$, en posant $z = y'$ on obtient une équation du premier ordre en z, dont il suffira d'intégrer les solutions.

2) Équations différentielles linéaires du deuxième ordre.

a) Définitions et premières propriétés.

DEF : une équation différentielle linéaire du deuxième ordre est une équation du type

$$(E) : a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = d(x)$$

où a, b, c, d sont quatre fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Résoudre (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est donc déterminer l'ensemble

$$S_I(E) = \left\{y \in C^2(I, \mathbb{R}) \ / \ \forall x \in I \ \ a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = d(x)\right\}$$

L'équation "homogène", ou "sans second membre" associée à (E) est l'équation :

$$(E_{ssm}) : a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = 0$$

PROP : l'ensemble des solutions de l'équation homogène $S_{I,\mathbb{R}}(E_{ssm})$ est un sous-espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{R})$ et soit $S_{I,\mathbb{R}}(E)$ est vide, soit il est non vide, et si y_0 est une solution particulière de (E),

$$S_I(E) = y_0 + S_I(E_{ssm})$$

D8

REM : contrairement au cas de l'ordre 1, il n'existe pas de méthode générale de résolution d'une équation linéaire du second ordre, sauf dans le cas où les coefficients sont constants, seul cas au programme de SUP.

b) Équations différentielles linéaires homogènes du deuxième ordre à coefficients constants.

$$\boxed{(E) : ay'' + by' + cy = 0} \; a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Remarque : une solution de (E) est forcément infiniment dérivable.

D9

On pose donc $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $S = \{y \in E \ / \ ay'' + by' + cy = 0\}$

METHODE N° 1 : Solutions exponentielles puis variation de la constante.

On recherche des solutions du type $x \mapsto e^{kx}$.

PROP 1 : $x \mapsto e^{kx}$ est solution de $(E) \Leftrightarrow (E_{car}) : ak^2 + bk + c = 0$.

D10
DEF : (E_{car}) est l'*équation caractéristique* de (E).

Notons k_1 et k_2 les deux solutions de cette équation (éventuellement complexes, et éventuellement confondues) ; nous savons que pour tout λ, $x \mapsto \lambda e^{k_1 x}$ est une solution de (E)
On fait alors varier la constante λ en posant :

$$y = ze^{k_1 x} \text{ avec } z \text{ fonction de } x$$

On a alors
PROP 2 : $y = ze^{k_1 x}$ est solution de $(E) \Leftrightarrow z'' = (k_2 - k_1)\, z'$
D11

Soit alors Δ le discriminant de (E_{car}).

Premier cas : $\Delta > 0$; k_1 et k_2 sont donc réels distincts.

PROP 3 : si $\Delta > 0$, $S = \left\{x \mapsto \lambda e^{k_1 x} + \mu e^{k_2 x} \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$

D12
Deuxième cas : $\Delta = 0$; $k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$

PROP 4 : si $\Delta = 0$, $S = \left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{kx} \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$

D13
Troisième cas : $\Delta < 0$; k_1 et k_2 sont donc complexes conjugués.

Si on résout dans $\mathbb{C}$ ($S_{\mathbb{C}} = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ / \ y'' = ay' + by\}$
Alors

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{x \mapsto \lambda e^{k_1 x} + \mu e^{k_2 x} \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}\right\}$$

comme dans le cas $\Delta > 0$, et $S = S_{\mathbb{C}} \cap C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose donc $\boxed{k_1 = r + i\omega \text{ avec } \omega > 0}$ (d'où $k_2 = r - i\omega$) et
PROP 5 : si $\Delta < 0$, $S = \{x \mapsto e^{rx}(\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x) \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \nu e^{rx} \cos(\omega x + \varphi) \ / \ \nu \geqslant 0, \varphi \in [0, 2\pi[\}$

D14

Remarque :
- si $r < 0$, ($\Leftrightarrow b$ non nul de même signe que a), les solutions tendent vers 0 en $+\infty$.
- si $r = 0$, ($\Leftrightarrow b = 0$), les solutions sont sinusoïdales.

METHODE N° 2 : suppression du terme en y'.

On étudie d'abord le cas où le coefficient de y' est nul.

PROP 1 (admise) : l'équation $y'' = ky$ possède pour solution générale :

$y = \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si $k = \omega^2$ est > 0

$y = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si $k = -\omega^2$ est < 0

$y = \lambda x + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si $k = 0$

D15

Ensuite, on pose $y = uz$ et on cherche la fonction u de sorte que l'équation différentielle en z ne contienne plus de terme en z'.

PROP 2 : la condition pour qu'il n'y ait pas de terme en z' est $2au' + bu = 0$, et l'équation différentielle en z est alors $auz'' = -\left(au'' + bu' + cu\right) z$

On choisit donc $u = e^{-\frac{b}{2a}x}$ et l'équation en z s'écrit alors

$$z'' = \frac{\Delta}{4a^2} z \text{ où } \Delta = b^2 - 4ac$$

On en déduit la résolution complète :

PROP 3 : l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ possède pour solution générale :

si $\Delta > 0$: $y = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(\lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x}\right) = \lambda e^{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}x} + \mu e^{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ où $\omega = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

si $\Delta < 0$: $y = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ où $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

si $\Delta = 0$: $y = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(\lambda x + \mu\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

E10 :

$y'' = \omega^2 y$ et $y'' = -\omega^2 y$ avec $\omega > 0$ (solutions à connaître par coeur).

$2y'' + 3y' - 2y = x$; $y'' + y' + y = 1$

$x'' + 2rx' + \omega^2 x = 0$ avec $r, \omega > 0$ (oscillations amorties) : les solutions tendent toutes vers 0 en $+\infty$.

$x'' + \omega_0^2 x = a \cos \omega t$ avec $\omega, \omega_0 > 0$ (oscillations non amorties forcées)

REM : on trouvera dans l'exercice 13. une méthode de variation des constantes permettant de trouver de façon systématique une solution particulière, après avoir résolu l'équation sans second membre.